



CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ
„LAURENȚIU PANAITOPOL”

EDIȚIA A XV-A

Clasa a VII-a

Punctaj din oficiu.....16p

Problema 1. O mulțime A de numere reale pozitive cu cel puțin 3 elemente are proprietatea: oricum am lua două elemente distincte x, y ale ei, are loc relația $xy > x + y$.

a) Arătați că $x > 1$, oricare ar fi $x \in A$.

b) Arătați că $xyz > x + y + z + 2$, oricare ar fi elementele distincte x, y, z ale lui A .

Soluție. a) Dacă $x, y \in A$, atunci $xy - y > x > 0$, deci $y(x - 1) > 0$ **5p**

Problema 2. Determinați numerele naturale a pentru care există un număr natural n (care depinde de a) astfel încât numărul $A = \sqrt{n+2a} + \sqrt{n+a^2}$ să fie rațional.

Soluție. Trebuie să existe k și l numere naturale astfel ca $n = k^2 - 2a = l^2 - a^2 \geq 0$ **3p**

Căutăm deci $k, l \in \mathbb{N}$ astfel încât $(l - k)(l + k) = a^2 - 2a$ **3p**

Dacă a este impar, atunci $a^2 - 2a$ este impar și putem lua $l - k = 1$, $l + k = a^2 - 2a$, adică $l = \frac{a^2 - 2a + 1}{2}$ și $n = (\frac{a^2 - 2a + 1}{2})^2 - a^2$. Pentru a obține $n \geq 0$ trebuie $\frac{a^2 - 2a + 1}{2} \geq a$, adică $a(a - 4) + 1 > 0$, ceea ce se întâmplă doar dacă $a \geq 5$ **6p**

Din $y > 0$ reiese $x - 1 > 0$, de unde $x > 1$ **5p**

b) Arătăm că cel mult un element al mulțimii A este ≤ 2 . Într-adevăr, dacă $x, y \in A$, $x \leq 2$ și $y \neq x$, atunci $y > \frac{x}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1} \geq 1 + 1 = 2$ **3p**

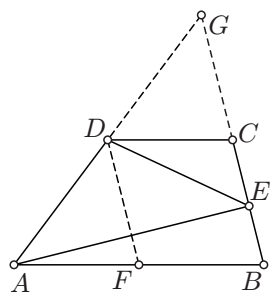
Dacă x, y, z sunt elemente distincte ale lui A , atunci putem presupune $x > 2$ și avem $xyz > x(y + z) = xy + xz$ **4p**

Apoi $xy + xz > x + y + x + z > 2 + x + y + z$, de unde reiese concluzia cerută..... **4p**

Dacă a este par, atunci $a^2 - 2a$ este par și putem lua $l - k = 2$, $l + k = \frac{a^2 - 2a}{2}$, adică $l = \frac{a^2 - 2a + 4}{2}$ și $n = (\frac{a^2 - 2a + 4}{2})^2 - a^2$. Pentru a obține $n \geq 0$ trebuie $\frac{a^2 - 2a + 4}{2} \geq a$, adică $a(a - 4) + 4 \geq 0$, ceea ce se întâmplă doar dacă $a = 0$, $a = 2$ sau $a \geq 6$ **6p**

Dacă $a = 1, 3$ sau 4 , atunci $A = \sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}$, $A = \sqrt{n+6} + \sqrt{n+9}$ sau $A = \sqrt{n+8} + \sqrt{n+16}$; în toate cele trei cazuri A nu poate fi rațional pentru niciun număr natural n , deoarece nu există pătrate perfecte ≥ 1 cu diferența egală cu 1, ≥ 6 cu diferența egală cu 3, respectiv ≥ 8 cu diferența egală cu 8.

Mulțimea valorilor lui a este $\mathbb{N} \setminus \{1, 3, 4\}$ **3p**



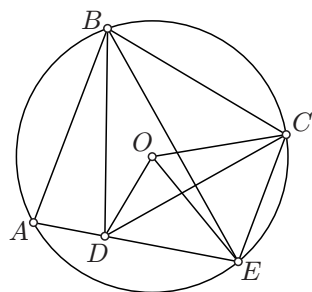
Problema 3. Trapezul $ABCD$ are $AB \parallel CD$ și $AB = 2 \cdot CD$. Fie $AE \perp BC$, cu $E \in BC$. Arătați că triunghiul ADE este isoscel.

Soluție. Fie G intersecția dreptelor AD și BC . Atunci CD este linie mijlocie în triunghiul ABG **11p**

Rezultă că DE este mediană în triunghiul dreptunghic AEG , deci $DE = DA$.. **10p**

Altă soluție. Fie $DF \parallel BC$, $F \in AB$. Atunci $AF = FB$, deci DF trece prin mijlocul lui AE **11p**

Rezultă că DF este mediatoarea segmentului AE , deci $DE = DA$ **10p**



Problema 4. Pe un cerc de centru O se consideră punctele distincte A, B, C astfel încât $AB = BC$ și în interiorul cercului se ia punctul D astfel încât triunghiul BCD să fie echilateral. Dreapta AD taie cercul a doua oară în punctul E . Arătați că triunghiul DEO este isoscel.

Soluție. Din $BA = BD$ reiese $\angle BAD = \angle BDA$. Deducem $\angle BDE = 180^\circ - \angle BDA = 180^\circ - \angle BAD = \angle BCE$ **6p**

Apoi $\angle BEA = \frac{1}{2} \widehat{AB} = \frac{1}{2} \widehat{BC} = \angle BEC$ **6p**

Obținem astfel $\triangle BED \equiv \triangle BEC$ (ULU)..... **3p**

Rezultă $\angle EBC = \frac{1}{2} \angle DBC = 30^\circ$, deci $\angle EOC = \widehat{CE} = 2 \cdot \angle EBC = 60^\circ$. Astfel triunghiul OEC este echilateral, deci $OE = CE = DE$ **6p**